

微分方程式 レポート課題 2019/11/11(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. C を任意の定数とした以下の曲線群が満たす微分方程式を求めよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

(例) $x = (t - C)^2$... (*)

(解) (*) 式の両辺を t について微分した式 $x' = 2(t - C)$, すなわち, $t - C = \frac{x'}{2}$ を

(*) 式に代入すると, $x = \left(\frac{x'}{2}\right)^2$, すなわち, $(x')^2 = 4x$ となる. ... (答)

(1) $x = (7t - C)^2$ (2) $x = Ce^{-t^4}$ (3) $x = t^3 - Ct$ (4) $x = \tan(t + C)$

2. 次の問いに答えよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

(1) 次の微分方程式の平衡状態 (あるいは平衡点) を求めよ. ただし, $r, K > 0$ である.

(例) $x' = 3x^2 - 1$

(答) 微分方程式 $x' = 3x^2 - 1$ の平衡状態は $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (平衡点は $\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$) である.

(i) $x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ (ii) $x' = x - x^3$ (iii) $x' = -x(x - 1)(x - 2)$

(2) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ について, 次の間に答えよ. ただし, $r, K > 0$ である.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で, 微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ. ただし, $x_0 \geq 0$ である.

(3) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = x - x^3$ について, 次の間に答えよ.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で, 微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ. ただし, $x_0 \geq 0$ である.

(4) 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = -x(x - 1)(x - 2)$ について, 次の間に答えよ.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で, 微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ. ただし, $x_0 \geq 0$ である.

注意. 結論を得るまでの途中式過程を必ず明記し, 読み手の立場に立ちながら 論述を行いましょう.