

# 微分方程式 第6回レポート課題と解答

出題日：2019/11/11(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1.  $C$  を任意の定数とした以下の曲線群が満たす微分方程式を求めよ. ただし,  $' = \frac{d}{dt}$  である. [各4点]

$$(1) x = (7t - C)^2 \quad (2) x = Ce^{-t^4} \quad (3) x = t^3 - Ct \quad (4) x = \tan(t + C)$$

解答 (概要). (1)  $x = (7t - C)^2$  の両辺を  $t$  について微分すると,

$$x' = 2(7t - C) \cdot 7 = 14(7t - C), \text{ すなわち, } 7t - C = \frac{x'}{14}. \quad (*)$$

(\*) 式を元の微分方程式  $x = (7t - C)^2$  に代入すると,  $x = (\frac{x'}{14})^2$ , すなわち,  $(x')^2 = 196x$  となる. ... (答)

(2)  $x = Ce^{-t^4}$  の両辺を  $t$  について微分すると,

$$x' = -4t^3 Ce^{-t^4}, \text{ すなわち, } C = -\frac{x' e^{t^4}}{4t^3}. \quad (**)$$

(\*\*) 式を元の微分方程式  $x = Ce^{-t^4}$  に代入すると,  $x = -\frac{x'}{4t^3}$ , すなわち,  $x' = -4t^3 x$  となる. ... (答)

(3)  $x = t^3 - Ct$  の両辺を  $t$  について微分すると,

$$x' = 3t^2 - C, \text{ すなわち, } C = 3t^2 - x', \quad (*3)$$

$$x'' = 6t, \text{ すなわち, } t = \frac{x''}{6}. \quad (*4)$$

(\*3), (\*4) 式を元の微分方程式  $x = t^3 - Ct$  に代入すると,

$$x = \left(\frac{x''}{6}\right)^3 - (3t^2 - x')\frac{x''}{6},$$

すなわち,

$$x = \left(\frac{x''}{6}\right)^3 - \left(3\left(\frac{x''}{6}\right)^2 - x'\right)\frac{x''}{6}$$

となる. ... (答)

注意.  $(\frac{x''}{6})^3 - (3(\frac{x''}{6})^2 - x')\frac{x''}{6} = \frac{x'x''}{6} - 2(\frac{x''}{6})^3$  より,  $x = \frac{x'x''}{6} - 2(\frac{x''}{6})^3$  と結論付けても良い.

(4)  $x = \tan(t + C)$  の両辺を  $t$  について微分すると,

$$x' = \frac{1}{\cos^2(t + C)}, \text{ すなわち, } x' = 1 + \tan^2(t + C). \quad (*5)$$

(\*5) 式を元の微分方程式  $x = \tan(t + C)$  に代入すると,  $x' = 1 + x^2$  となる. ... (答)

2. 次の問いに答えよ. ただし,  $' = \frac{d}{dt}$  である.

(1) 次の微分方程式の平衡状態 (あるいは平衡点) を求めよ. ただし,  $r, K > 0$  である. [各3点]

$$(i) x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (ii) x' = x - x^3 \quad (iii) x' = -x(x-1)(x-2)$$

解答. (i)  $rx^*(1 - \frac{x^*}{K}) = 0$  を解くと,  $x^* = 0, K$ . よって, 平衡状態は  $x(t) = 0, x(t) = K$  の2つである. ... (答)

(ii)  $x^* - (x^*)^3 = 0$  を解くと,  $x^* = 0, \pm 1$ . よって, 平衡状態は  $x(t) = 0, x(t) = \pm 1$  の3つである. ... (答)

(iii)  $-x^*(x^* - 1)(x^* - 2) = 0$  を解くと,  $x^* = 0, 1, 2$ . よって, 平衡状態は  $x(t) = 0, x(t) = 1, x(t) = 2$  の3つである. ... (答)

(2) 微分方程式  $x' = f(x)$ ,  $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ ,  $r, K > 0$  について, 次の間に答えよ. [(a) 5 点, (b) 10 点, (c) 10 点]

(a) 関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ.

(b) 微分方程式  $x' = f(x)$  の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件  $x(0) = x_0 \geq 0$  の下で,  $x' = f(x)$  の解  $x = x(t)$  における  $t \rightarrow +\infty$  の極限を初期値  $x_0$  の場合分けにより求めよ.

解答. (a)  $f(x) = x - \frac{x^2}{K}$  より,  $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}r\left(x - \frac{x^2}{K}\right) = r\left(1 - \frac{2x}{K}\right)$  である. ... (答)

(b) 微分方程式  $x' = f(x)$  の平衡状態  $\underline{x=0}, \underline{x=K}$  における関数  $f(x)$  の微分係数の符号に着目すると,

$$(i) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = r\left(1 - \frac{2 \cdot 0}{K}\right) = r > 0 \quad (ii) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=K} = r\left(1 - \frac{2 \cdot K}{K}\right) = -r < 0$$

となることから, 2 つの平衡状態  $x = 0, x = K$  の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = K \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(c) 結論のみ述べると, 以下の 2 通りに解の漸近挙動が分かれる.

$$\begin{cases} \cdot x_0 = 0 \text{ のときのみ, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ である.} \\ \cdot x_0 > 0 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K \text{ である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(3) 微分方程式  $x' = f(x)$ ,  $f(x) = x - x^3$  について, 次の間に答えよ. [(a) 5 点, (b) 10 点, (c) 10 点]

(a) 関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ.

(b) 微分方程式  $x' = f(x)$  の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件  $x(0) = x_0 \geq 0$  の下で,  $x' = f(x)$  の解  $x = x(t)$  における  $t \rightarrow +\infty$  の極限を初期値  $x_0$  の場合分けにより求めよ.

解答. (a)  $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x - x^3) = 1 - 3x^2$  である. ... (答)

(b) 結論のみ述べると, 3 つの平衡状態  $\underline{x=0}, \underline{x=1}, \underline{x=-1}$  の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = 1 \text{ は安定な平衡状態である.} \\ (iii) \text{ 平衡状態 } x = -1 \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(c) 結論のみ述べると, 以下の 2 通りに解の漸近挙動が分かれる.

$$\begin{cases} \cdot x_0 = 0 \text{ のときのみ, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ である.} \\ \cdot x_0 > 0 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 \text{ である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(4) 微分方程式  $x' = f(x)$ ,  $f(x) = -x(x-1)(x-2)$  について, 次の間に答えよ. [(a) 5 点, (b) 10 点, (c) 10 点]

(a) 関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ.

(b) 微分方程式  $x' = f(x)$  の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件  $x(0) = x_0 \geq 0$  の下で,  $x' = f(x)$  の解  $x = x(t)$  における  $t \rightarrow +\infty$  の極限を初期値  $x_0$  の場合分けにより求めよ.

解答. (a)  $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-x(x-1)(x-2)) = -3x^2 + 6x - 2$  である. ... (答)

(b) 結論のみ述べると, 3 つの平衡状態  $\underline{x=0}, \underline{x=1}, \underline{x=2}$  の安定性は以下の通りにまとめられる.

$$\begin{cases} (i) \text{ 平衡状態 } x = 0 \text{ は安定な平衡状態である.} \\ (ii) \text{ 平衡状態 } x = 1 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ (iii) \text{ 平衡状態 } x = 2 \text{ は安定な平衡状態である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(c) 結論のみ述べると, 以下の 3 通りに解の漸近挙動が分かれる.

$$\begin{cases} \cdot 0 \leq x_0 < 1 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ である.} \\ \cdot x_0 = 1 \text{ のときのみ, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 \text{ である.} \\ \cdot x_0 > 1 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2 \text{ である.} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$