

微分方程式 補助資料【配布日：2019/11/18(月)】

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. 次の行列の積を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

解答. (1) 2×2 型行列と 2×2 型行列の積は 2×2 型行列であり,

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 & 2 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

(2) 2×2 型行列と 2×1 型行列の積は 2×1 型行列であり,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \\ -4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

(3) 3×1 型行列と 1×3 型行列の積は 3×3 型行列であり,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 0 & -2 \cdot 2 & -2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

(4) 2×2 型行列と 2×2 型行列の積は 2×2 型行列であり,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

(5) 3×3 型行列と 3×1 型行列の積は 3×1 型行列であり,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + (-6) \cdot (-1) \\ 7 \cdot 3 + (-8) \cdot 1 + 9 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

2. $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき, AB および BA を求めよ.

解答. 3×3 型行列と 3×3 型行列の積は 3×3 型行列である (AB と BA が等しくないことにも注意しよう).

$$AB = \dots = \begin{pmatrix} -9 & 16 & 21 \\ -6 & 10 & 12 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \dots = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -7 \\ 12 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

3. 次の行列 A が正則であるかを述べよ. また, A が正則ならば A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -124 & 165 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

解答. (1) $|A| = 2 \cdot (-1) - (-5) \cdot 3 = 13 \neq 0$ より, A は正則である. したがって, A の逆行列 A^{-1} が存在し,

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{あるいは, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

(2) $|A| = 3 \cdot 165 - (-124) \cdot (-4) = -1 \neq 0$ より, A は正則である. したがって, A の逆行列 A^{-1} が存在し,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 165 & 4 \\ 124 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -165 & -4 \\ -124 & -3 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

(3) $|A| = 3 \cdot 8 - (-6) \cdot (-4) = 0$ より, A は正則でない. したがって, A の逆行列 A^{-1} は存在しない. $\dots (\text{答})$

4. 次の行列の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ および各固有値に属する固有ベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

解答. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおき, A の固有値 λ および各固有値 λ に属する固有ベクトルを以下の手順により求めよう.

Step 1. 固有値 λ の導出: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ より,

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4).$$

したがって, 行列 A の固有値 λ は $\lambda = -1, 4$.

Step 2. 各固有値 λ に属する固有ベクトルの導出:

(i) $\lambda = -1$ の場合 $\cdots A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 3u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff 2u_1 + 2u_2 = 0. \end{aligned} \tag{*}$$

ここで, $u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}$ を (*) 式に代入すると $2c + 2u_2 = 0$, すなわち, $u_2 = -c$. したがって,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = c \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

(ii) $\lambda = 4$ の場合 $\cdots A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -3u_1 + 2u_2 = 0 \\ 3u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff 3u_1 - 2u_2 = 0. \end{aligned} \tag{**}$$

ここで, $u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}$ を (**) 式に代入すると $3c - 2u_2 = 0$, すなわち, $u_2 = \frac{3}{2}c$. したがって,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{3}{2}c \end{pmatrix} = c \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

(i), (ii) より, $\lambda = -1$ に属する固有ベクトルは $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$, $\lambda = 4$ に属する固有ベクトルは $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}}$. $\cdots$ (答)

(2) $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ とおき, A の固有値 λ および各固有値 λ に属する固有ベクトルを以下の手順により求めよう.

Step 1. 固有値 λ の導出: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 8-\lambda & -1 \\ -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}$ より, $\det(A - \lambda I) = (\lambda-8)^2 - 1 = (\lambda-7)(\lambda-9)$ である.

したがって, 行列 A の固有値 λ は $\lambda = 7, 9$.

Step 2. 各固有値 λ に属する固有ベクトルの導出: (1) と同様の方法によって, $\lambda = 7$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda = 9$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である. [(1) と同様に, 各自で途中式過程を補いましょう] $\cdots$ (答)