微分方程式　レポート課題　2019/11/25(月)

担当教員：江夏 洋一（A208 教室, 17:10-18:50）

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ および各固有値に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ を求めよ．

(2) 行列 A の指数関数 $e^{tA} = I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \dfrac{t^n}{n!}A^n + \cdots$ を求めよ．

(3) 2 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

の一般解を求めよ．

注意． 結論を得るまでの$\underline{\underline{\text{途中式過程}}}$を必ず明記し，$\underline{\underline{\text{読み手の立場に立ちながら}}}$論述を行いましょう．

裏面：【p.182】研究 6.7：（正方）行列の指数関数，補助資料

【p.182】研究 6.7 :（正方）行列の指数関数

定義． A を正方行列とする．このとき，次の関数：

$$e^{tA} := I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k \right)$$

を行列 A の**指数関数**という．ただし，$A^0 = I$ である．また，e^{tA} を $\exp tA$ と書くこともある．

例 1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ の場合

各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$A^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
e^{tA} =& I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \\
=& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} + \cdots \\
=& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & 5t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(-2t)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(5t)^2}{2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \frac{(-2t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{(5t)^n}{n!} \end{pmatrix} + \cdots \\
=& \begin{pmatrix} 1 + (-2t) + \frac{(-2t)^2}{2} + \cdots + \frac{(-2t)^n}{n!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 5t + \frac{(5t)^2}{2} + \cdots + \frac{(5t)^n}{n!} + \cdots \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}. \quad \left(\because \text{【p.40】マクローリン展開：} e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},\ t \in \mathbb{R} \right)
\end{aligned}$$

例 2. $A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}$（$P$：正則行列）の場合

例 1 より，

$$\begin{aligned}
A^2 =& P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1} \\
=& P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}I\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1} \\
=& P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1} \\
=& P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^2 P^{-1} \\
=& P\begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}P^{-1}, \\
A^3 =& P\begin{pmatrix} (-2)^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}P^{-1}, \ \cdots, \ A^n = P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}
e^{tA} =& I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \\
=& P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} + tP\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1} + \frac{t^2}{2}P\begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1} + \cdots \\
=& P\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & 5t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(-2t)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(5t)^2}{2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \frac{(-2t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{(5t)^n}{n!} \end{pmatrix} + \cdots \right\}P^{-1} \\
=& P\begin{pmatrix} 1 + (-2t) + \frac{(-2t)^2}{2} + \cdots + \frac{(-2t)^n}{n!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 5t + \frac{(5t)^2}{2} + \cdots + \frac{(5t)^n}{n!} + \cdots \end{pmatrix}P^{-1} \\
=& P\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}P^{-1}.
\end{aligned}$$