

微分方程式 復習テスト 解答

出題日：2019/12/2(月)

担当教員：江夏 洋一 (A208 教室, 17:10-18:50)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である. [(1) 10 点, (2) 10 点, (3) 10 点, (4) 10 点, (5) 10 点]

$$(1) x' = \sin x \quad (2) x' = te^{-(t^2+x)} \quad (3) x'' + 8x' - 9x = 0 \quad (4) x'' + 8x' + 16x = 0 \quad (5) x'' + 8x' + 25x = 0$$

解答. (1) $\sin x = 1 \cdot \sin x$ より, 微分方程式 $x' = \sin x$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \sin x &\implies \frac{1}{\sin x} \frac{dx}{dt} = 1 \quad \left(\text{あるいは } \frac{1}{\sin x} dx = 1 dt \right) \\ &\implies \int \frac{1}{\sin x} dx = \int dt. \end{aligned}$$

ここで, 以下の等式:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int dt \implies \frac{1}{2} \int \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = \int dt \\ &\implies \frac{1}{2} (\log |1 - \cos x| - \log |1 + \cos x|) = t + C \\ &\implies \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| = t + C \\ &\implies \log \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| = 2t + C \quad (2C \text{ を } C \text{ に置き換えた}) \\ &\implies \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = Ce^{2t} \quad (\pm e^C \text{ を } C \text{ に置き換えた}). \quad \dots (\dagger) \end{aligned}$$

最後に, $(\dagger)$ 式の両辺を $(1 + \cos x)$ 倍し, x について解くと,

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &= Ce^{2t}(1 + \cos x) \iff (1 + Ce^{2t}) \cos x = 1 - Ce^{2t} \\ &\iff \cos x = \frac{1 - Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}} \\ &\iff x = \cos^{-1} \left(\frac{1 - Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}} \right). \end{aligned}$$

したがって, 求める一般解は $x = \cos^{-1} \left(\frac{1 - Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}} \right)$ (C は任意の定数) である. ... (答)

(2) $te^{-(t^2+x)} = te^{-t^2} \cdot \frac{1}{e^x}$ より, 微分方程式 $x' = te^{-(t^2+x)}$ は変数分離形なので

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = te^{-(t^2+x)} &\implies e^x \frac{dx}{dt} = te^{-t^2} \quad \left(\text{あるいは } e^x dx = te^{-t^2} dt \right) \\ &\implies \int e^x dx = \int te^{-t^2} dt \\ &\implies e^x = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + C \\ &\implies x = \log \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C \right). \end{aligned}$$

したがって, 求める一般解は $x = \log \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C \right)$ (C は任意の定数) である. ... (答)

(3) $x'' + 8x' - 9x = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$ ($\iff (\lambda - 1)(\lambda + 9) = 0$) の根は $\lambda = 1, -9$ (相異なる 2 つの実根) である. したがって, 一般解は $x = Ae^t + Be^{-9t}$ (A, B は任意の定数) である. ... (答)

(4) $x'' + 8x' + 16x = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ ($\iff (\lambda + 4)^2 = 0$) の根は $\lambda = -4$ (重根) である. したがって, 一般解は $x = Ae^{-4t} + Bte^{-4t}$ (A, B は任意の定数) である. ... (答)

(5) $x'' + 8x' + 25x = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$ ($\iff (\lambda + 4)^2 + 3^2 = 0$) の根は $\lambda = -4 \pm 3i$ (相異なる 2 つの虚根) である. したがって, 一般解は $y = Ae^{-4t} \cos 3t + Be^{-4t} \sin 3t$ (A, B は任意の定数) である. ... (答)

2. 次の初期値問題を解け. ただし, $' = \frac{d}{dt}$ である.

[(1) 5 点, (2) 5 点, (3) 5 点]

$$(1) \begin{cases} x' = te^{-(t^2+x)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x'' + 8x' - 9x = 0 \\ x(0) = 5, x'(0) = -25 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x'' + 8x' + 16x = 0 \\ x(0) = 5, x'(0) = -25 \end{cases}$$

解答. (1) **Step 1.** $x' = te^{-(t^2+x)}$ の一般解: 問 1(2) より, $x = \log\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C\right)$ (C は任意の定数) である.

Step 2. C の決定: Step 1 で得た一般解 $x = \log(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C)$ に初期条件 $x(0) = 0$, すなわち, $t = 0, x = 0$ を代入すると

$$0 = \log\left(-\frac{1}{2}e^{-0^2} + C\right) \iff 0 = \log\left(-\frac{1}{2} + C\right), \text{ すなわち, } C = \frac{3}{2}.$$

したがって, $x = \log\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{3}{2}\right)$ である. ... (答)

(2) **Step 1.** $x'' + 8x' - 9x = 0$ の一般解: 問 1(3) より, $x = Ae^t + Be^{-9t}$ (A, B は任意の定数) である.

Step 2. A, B の決定: $x = Ae^t + Be^{-9t}$ および $x' = Ae^t - 9Be^{-9t}$ に初期条件 $x(0) = 5, x'(0) = -25$ すなわち, $t = 0, x = 5, x' = -25$ を代入すると

$$\begin{cases} 5 = Ae^0 + Be^{-9 \cdot 0} \\ -25 = Ae^0 - 9Be^{-9 \cdot 0} \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = A + B \\ -25 = A - 9B, \end{cases} \text{ すなわち, } \begin{cases} A = 2 \\ B = 3. \end{cases}$$

したがって, $x = 2e^t + 3e^{-9t}$ である. ... (答)

(3) **Step 1.** $x'' + 8x' + 16x = 0$ の一般解: 問 1(3) より, $x = Ae^{-4t} + Bte^{-4t}$ (A, B は任意の定数) である.

Step 2. A, B の決定: (2) と同様に, $x = Ae^{-4t} + Bte^{-4t}$ および $x' = -4Ae^{-4t} + Be^{-4t} - 4Bte^{-4t}$ に初期条件 $x(0) = 5, x'(0) = -25$ すなわち, $t = 0, x = 5, x' = -25$ を代入すると

$$\begin{cases} 5 = Ae^{-4 \cdot 0} + B \cdot 0e^{-4 \cdot 0} \\ -25 = -4Ae^{-4 \cdot 0} + Be^{-4 \cdot 0} - 4B \cdot 0e^{-4 \cdot 0} \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = A \\ -25 = -4A + B, \end{cases} \text{ すなわち, } \begin{cases} A = 5 \\ B = -5. \end{cases}$$

したがって, $x = 5e^{-4t} + (-5)te^{-4t}$, すなわち, $x = 5e^{-4t} - 5te^{-4t}$ である. ... (答)

3. 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

[(1) 20 点, (2) 20 点]

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2017 & 1 \\ 1 & 2017 \end{pmatrix}$$

解答. (1) **Step 1.** 固有値 λ の導出: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ より,

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = \dots = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

であり, $|A - \lambda I| = 0$ を λ について解くと $\lambda = -1, 4$ となる. したがって, 行列 A の固有値 λ は $\lambda = -1, 4$ である. ... (答)

Step 2. 各固有値 λ に属する固有ベクトルの導出:

(i) $\lambda = -1$ の場合 ... $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2u_1 + 3u_2 = 0 \\ 2u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff 2u_1 + 3u_2 = 0. \end{aligned} \tag{*}$$

ここで, $u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}$ を (*) 式に代入すると $2c + 3u_2 = 0$, すなわち, $u_2 = -\frac{2}{3}c$. したがって,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\frac{2}{3}\mathbf{c} \end{pmatrix} = \underline{\underline{c \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(ii) $\lambda = 4$ の場合 $\dots A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -3u_1 + 3u_2 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff 2u_1 - 2u_2 = 0. \end{aligned} \quad (**)$$

ここで, $u_1 = c$ (c は任意の定数) とおき, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{c}$ を (**) 式に代入すると $2c - 2u_2 = 0$, すなわち, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{c}$. したがって,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = c \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(i), (ii) より, $\lambda = -1$ に対する A の固有ベクトルは $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}}$, $\lambda = 4$ に対する A の固有ベクトルは $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ である. $\dots$ (答)

(2) (1) と同様の方法により, A の固有値 λ は $\lambda = 2016, 2018$ であり,

(i) $\lambda = 2016$ に属する A の固有ベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ は $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (あるいは, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ など),

(ii) $\lambda = 2018$ に属する A の固有ベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ は $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. $\dots$ (答)

4. 次の問に答えよ.

[(1) 10 点, (2) 10 点]

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 行列 A の指数関数 $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$ を求めよ.

(2) 2 次元ベクトル値関数 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ の一般解を求めよ.

解答. (1) 問 3(1) より, 正則行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ および対角行列 $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, $P^{-1}AP = D$, すなわち, $A = PDP^{-1}$ より, $A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}, \dots, A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}, \dots$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPDP^{-1}} = I + t(PDP^{-1}) + \frac{t^2}{2}(PDP^{-1})^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}(PDP^{-1})^n + \dots \\ &= I + tPDP^{-1} + \frac{t^2}{2}PD^2P^{-1} + \dots + \frac{t^n}{n!}PD^nP^{-1} + \dots \\ &= P \underbrace{\left(I + tD + \frac{t^2}{2}D^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}D^n + \dots \right)}_{P^{-1}} P^{-1} \\ &= P \underbrace{e^{tD}}_{P^{-1}} P^{-1} \\ &= P \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} P^{-1} \end{aligned}$$

となることから,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{1 \cdot 1 - 1 \cdot (-\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{5} \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{5} \begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} + e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{2}{3}e^{-t} + e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. $\dots$ (答)

(2) (1) より, $\mathbf{x} = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{-t} + e^{4t} \\ \frac{2}{3}e^{-t} + e^{4t} \end{pmatrix}$ (C_1, C_2 は任意の定数) である. $\dots$ (答)

5. 微分方程式 $x' = f(x)$, $f(x) = -x(x+1)(x-1)(x-2)$ について、次の問に答えよ。 [(a) 5 点, (b) 10 点, (c) 10 点]

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ を求めよ.

(b) 微分方程式 $x' = f(x)$ の安定な平衡状態および不安定な平衡状態をそれぞれ求めよ.

(c) 初期条件 $x(0) = x_0$ の下で、微分方程式 $x' = f(x)$ の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限を初期値 x_0 の場合分けにより求めよ. ただし, $x_0 \geq 0$ である.

解答. (a) $-x(x+1)(x-1)(x-2) = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$ より,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x) = -4x^3 + 6x^2 + 2x - 2. \quad \dots (\text{答})$$

(b) $f(x) = 0 \iff \underline{\underline{x = -1, 0, 1, 2}}$ より, 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態は $\underline{\underline{x = -1, x = 0, x = 1, x = 2}}$ の 4 つである.

次に, 4 つの平衡状態 $\underline{\underline{x = -1, x = 0, x = 1, x = 2}}$ における関数 $f(x)$ の微分係数の符号に着目すると,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-1} &= -4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 2(-1) - 2 = 6 > 0 \\ \text{(ii)} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} &= -4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \\ \text{(iii)} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=1} &= -4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 2 > 0 \\ \text{(iv)} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=2} &= -4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = -6 < 0 \end{aligned}$$

となることから, 4 つの平衡状態 $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$ の安定性は以下の通りにまとめられる.

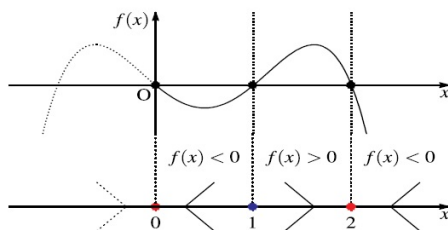
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) 平衡状態 } x = -1 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ \text{(ii) 平衡状態 } x = 0 \text{ は安定な平衡状態である.} \\ \text{(iii) 平衡状態 } x = 1 \text{ は不安定な平衡状態である.} \\ \text{(iv) 平衡状態 } x = 2 \text{ は安定な平衡状態である.} \end{array} \right. \quad \dots (\text{答})$$

(c) はじめに, (b) より, 微分方程式 $x' = f(x)$ の平衡状態は $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$ であるが, $x_0 \geq 0$ の範囲に限られているため, 平衡状態 $x = -1$ を除いた 3 つの平衡状態 $x = 0, x = 1, x = 2$ について考えると, 以下の点が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad x_0 = 0 &\implies x(t) \equiv 0 \ (t \geq 0) \text{ が成り立つことから, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ である.} \\ \text{(ii)}_{=1} \quad x_0 = 1 &\implies x(t) \equiv 1 \ (t \geq 0) \text{ が成り立つことから, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 \text{ である.} \\ \text{(iii)}_{=2} \quad x_0 = 2 &\implies x(t) \equiv 2 \ (t \geq 0) \text{ が成り立つことから, } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2 \text{ である.} \end{aligned}$$

また, 微分方程式 $x' = f(x)$ に現れる関数 $f(x)$ の符号について, 以下のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{(ii)}_{<1} \quad 0 < x < 1 &\implies f(x) < 0 \text{ (すなわち, } \underline{\underline{x' < 0}}) \\ \text{(ii)}_{>1} \&\text{(iii)}_{<2} \quad 1 < x < 2 \implies f(x) > 0 \text{ (すなわち, } \underline{\underline{x' > 0}}) \\ \text{(iii)}_{>2} \quad x > 2 &\implies f(x) < 0 \text{ (すなわち, } \underline{\underline{x' < 0}}) \end{aligned}$$



ここで, 初期条件 $x(0) = x_0$ を含めた初期値問題 (*) の解 $x = x(t)$ における $t \rightarrow +\infty$ の極限について, $0 \leq x_0 < 1$ あるいは $x_0 > 2$ ならば, $x(t)$ は減少傾向にあり, $1 < x_0 < 2$ ならば, $x(t)$ は増加傾向にある. 以上より, 次のことが成り立つ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(ii)}_{<1} & 0 < x_0 < 1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \\ \text{(ii)}_{>1} \&\text{(iii)}_{<2}, \text{(iii)}_{>2} & 1 < x_0 < 2, x_0 > 2 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2 \end{array} \right.$$

したがって, (i) および (ii)₌₁, (iii)₌₂ と併せて, 初期値 x_0 の場合分けによる解 $x = x(t)$ の極限は次の通りにまとめられる.

$$\text{(i)} \quad 0 \leq x_0 < 1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{(ii)} \quad x_0 = 1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 \quad \text{(iii)} \quad x_0 > 1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2 \quad \dots (\text{答})$$