2019/06/24(月) 17:10-18:50　基礎線形代数 1（明治大学 理工学部 建築学科）　　補助資料

使用テキスト: 対馬龍司「線形代数学講義」(共立出版)

§3.1.2. 行列式の定義と性質（後半）(テキスト p.73-78)

2018/05/28(月) に議論した 2.3 節での基本変形に伴う行列式の変化について，次の 4 点が成り立つ．ただし，$c \in \mathbb{R}$ である．

(R1) ある行（または列）を c 倍すると，行列式も c 倍される【p.73, 定理 3.1.13, 1)】.

$$\text{(i)}\ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{vmatrix} \underset{2\text{ 行目}\times(-2)}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)}\ \begin{vmatrix} -2 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 15 \end{vmatrix} \underset{3\text{ 列目}\times\frac{1}{5}}{=} 5\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

(R2)′ ある行（または列）に他の行（または列）を加える，あるいは引いても，行列式は変わらない【p.73, 定理 3.1.13, 2)】.

$$\text{(i)}'\ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{vmatrix} \underset{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}}{=} \begin{vmatrix} -2+2 & 0+4 & 5+6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\text{(ii)}'\ \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{2\text{ 列目}-3\text{ 列目}}{=} \begin{vmatrix} -2 & -1-2 & 2 \\ -4 & 1-1 & 1 \\ -1 & 3-3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(R2) ある行（または列）に他の行（または列）の c 倍を加える，あるいは引いても，行列式は変わらない【p.75, 定理 3.1.17】.

$$\text{(i)}\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{vmatrix} \underset{3\text{ 行目}-1\text{ 行目}\times 2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0-0\cdot 2 & 8-4\cdot 2 & 22-11\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{(ii)}\ \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{1\text{ 列目}+3\text{ 列目}\times\frac{1}{3}}{=} \begin{vmatrix} -2+2\cdot\frac{1}{3} & -3 & 2 \\ -4+1\cdot\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ -1+3\cdot\frac{1}{3} & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & -3 & 2 \\ -\frac{11}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

要注意． 基本変形 (R2)′ および (R2) において引き算を用いる場合，他の行（または列）の c 倍からある行（または列）を引いてしまうと，行列式が (-1) 倍されてしまう。そのため，以下の式変形は**誤り**である！

$$\text{(ii)}'\ \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{3\text{ 列目}-2\text{ 列目}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 2-(-1) & 2 \\ -4 & 1-1 & 1 \\ -1 & 3-3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(R3) 2 つの行（または列）を交換すると，行列式が (-1) 倍される，すなわち，符号が入れ替わる【p.74, 定理 3.1.16, 1)】.

$$\text{(i)}\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{1\text{ 行目}\leftrightarrow 2\text{ 行目}}{=} (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)}\ \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & -3 & 2 \\ -\frac{11}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{1\text{ 列目}\leftrightarrow 2\text{ 列目}}{=} (-1)\begin{vmatrix} -3 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

命題【p.76, 例 3.1.19】． $a_{ij} \in \mathbb{R}\ (1 \le i, j \le n)$ とする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$(1)\ \left|\begin{array}{c:cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)\ \left|\begin{array}{c:cccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上で与えた基本変形 (R1), (R2)′, (R2), (R3) および命題より，以下の通りに行列式が求まる．

$$\text{(i)}\ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{vmatrix} \underset{\text{(R1)},\text{(R2)}',\text{(R2)}}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{(R3)}}{=} -\frac{1}{2}(-1)\left|\begin{array}{c:cc} 2 & 4 & 6 \\ \hdashline 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 = 0.$$

$$\text{(ii)}\ \begin{vmatrix} -2 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 15 \end{vmatrix} \underset{\text{(R1)},\text{(R2)}',\text{(R2)}}{=} 5\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & -3 & 2 \\ -\frac{11}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{(R3)}}{=} 5(-1)\left|\begin{array}{c:cc} -3 & -\frac{4}{3} & 2 \\ \hdashline 0 & -\frac{11}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = -5(-3)\begin{vmatrix} -\frac{11}{3} & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15\cdot(-11) = -165.$$