使用テキスト：対馬龍司「線形代数学講義」（共立出版）

§3.2. 行列式の展開＜余因子展開による逆行列の導出＞（テキスト p.81-82）

例 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

解答. はじめに，第 1 行による展開 $(|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13})$ を用いると，

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + (-15) + 14 = -9.$$

$|A| = -9 \neq 0$ より A は正則，すなわち，A の逆行列 A^{-1} は存在する．逆行列 A^{-1} の存在を示した上で，A^{-1} の成分を具体的に与えるために，掃き出し法および余因子展開による 2 通りの解法を与えよう．

1．行の基本変形を用いた**掃き出し法** (p.44-45)：単位行列を右に並べた行列から左に並べた行列への「行」基本変形

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (1) \begin{cases} 第 2 行 + 第 1 行 \times (-2) \\ 第 3 行 + 第 1 行 \times (-1) \end{cases}$$

$$\overset{(2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (2)\ 第 2 行 \longleftrightarrow 第 3 行$$

$$\overset{(3)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -7 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad (3) \begin{cases} 第 1 行 + 第 2 行 \times (-3) \\ 第 3 行 + 第 2 行 \times 5 \end{cases}$$

$$\overset{(4)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 9 & -7 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad (4) \begin{cases} 第 1 行 + 第 3 行 \times \frac{4}{9} \\ 第 2 行 + 第 3 行 \times (-\frac{2}{9}) \end{cases}$$

$$\overset{(5)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right). \quad (5)\ 第 3 行 \times \frac{1}{9}$$

したがって，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$，あるいは，$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ 5 & -2 & -1 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ である． $\cdots$ (答)

注意. 逆行列を求めるときに行の基本変形を用いたが，列の基本変形を用いてはならない．

2．**余因子展開** (p.80-81)：行列 A の (i, j) 成分 a_{ij} の 余因子 Δ_{ij} の導出

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

したがって，$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t(\Delta_{ij}) = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & -4 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ である． $\cdots$ (答)

注意. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$ は正しい (p.81, 定理 3.2.2)．しかし，$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$ は誤りである．

§3.3. 行列式の積＜連立方程式の解＞（テキスト p.85-87）

定理 3.3.5 (クラメルの公式). $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,n}}$ を n 次正則行列とする．このとき，連立 1 次方程式：

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \text{すなわち,}\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{$*$}$$

はただ 1 組の解を持つ．また，方程式 $(*)$ の解 $\boldsymbol{x}$ を成す各成分 x_j $(1\leq j\leq n)$ は次のように与えられる．

$$x_j=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1j} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2j} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{nj} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}},\quad 1\leq j\leq n. \tag{$**$}$$

例 2 (p.87, 問 3.7). 次の連立方程式を「クラメルの公式を用いて」解け．

$$\begin{cases} -x+y+\sqrt{2}z=1,\\ x-y+\sqrt{2}z=1,\\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y=1. \end{cases} \tag{$***$}$$

解答. 以下の 3 つのステップにより，連立方程式の解を求めれば良い．

Step 1. 方程式の左辺の係数からなる係数行列 A と右辺の値から成るベクトル $\boldsymbol{b}$ の決定

n 次行列 A および n 次ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

とおく．このとき，方程式 $(***)$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に書き直される．

Step 2. $|A|\neq 0$ が成り立つかどうかの確認による，方程式 $(***)$ の解 $\boldsymbol{x}$ が一意に定まることの確認

$$\begin{aligned}|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}&=-1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}+\sqrt{2}\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{2}\end{vmatrix}\\ &=-1\cdot(-2)+1\cdot 2+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=8\end{aligned}$$

より，$|A|\neq 0$ が成り立つ．したがって，行列 A は正則であることから，方程式 $(***)$ はただ 1 つの解を持つ．

Step 3. クラメルの公式を用いた方程式 $(***)$ の解 $\boldsymbol{x}$ の導出

定理 3.3.5 において与えられた行列式を用いて表された解 $(**)$ に行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分を代入すると，

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，すなわち，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である． $\cdots$ (答)