

使用テキスト: 対馬龍司「線形代数学講義」(共立出版)

§2.2. 行列の定義と演算 ... ベクトルを含む行列の基本計算

1. 行列の加法, 減法, スカラー倍および乗法 (m 行 n 列) [テキスト p.33-38]
 (2. 行列の加法, 減法, スカラー倍および乗法 (2 行 2 列) [テキスト p.22-25])

1. 行列の加法, 減法, スカラー倍および乗法 (m 行 n 列) [テキスト p.33-38]

数 (実数あるいは複素数) を縦および横に並べて長方形に配列したものを行列という. また, m, n を自然数とすると, 数 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) を縦に m 個, 横に n 個並べて得られる行列:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ 列} \\ m \text{ 行} \end{array}$$

を m 行 n 型の行列あるいは (m, n) 型の行列という. このとき, $A = (a_{ij})$ は m 行 n 列の行列 あるいは (m, n) 型行列であるといい, 行列 A を構成する数 a_{ij} を, 行列 A の (i, j) 成分という. 特に, 行列 A のすべての成分が 0 のとき, A を零行列といい, O (アルファベットの「オー」) で表す. なお, $m = n$ のとき, 行列 A を $(n \text{ 次の})$ 正方行列という.

定義 1.1 (行列の和, 差およびスカラー倍). m, n を自然数とし, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を (m, n) 型行列とする. このとき, 2 つの行列 A, B に対して, その和 $A + B$ および差 $A - B$ を

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \text{ すなわち, } A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}), \text{ すなわち, } A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

とそれぞれ定義する. さらに, スカラー k に対して, 行列 A のスカラー倍 kA を

$$kA = (ka_{ij}), \text{ すなわち, } kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

と定義する. なお, A, B が共に (m, n) 型行列であれば, 3 つの行列 $A + B, A - B, kA$ は (m, n) 型行列である.

例 1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, $A + B, A - B, -3A$ を求めよ.

解答. 定義 1.1 より, 3 つの行列 $A + B, A - B, -3A$ のいずれも $(2, 3)$ 型行列であり,

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+(-2) & 1+2 \\ -1+(-3) & -3+0 & 3+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 4-(-2) & 1-2 \\ -1-(-3) & -3-0 & 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$-3A = -3 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & -3 \cdot 4 & -3 \cdot 1 \\ -3 \cdot (-1) & -3 \cdot (-3) & -3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -3 \\ 3 & 9 & -9 \end{pmatrix}. \quad \dots (\text{答})$$

定義 1.2 (行列の積). l, m, n を自然数とし, $A = (a_{ij})$ を $(l, \textcolor{red}{m})$ 型行列, $B = (b_{ij})$ を $(\textcolor{blue}{m}, n)$ 型行列とする. このとき,

$$\text{行列 } A \text{ の列の数} = \text{行列 } B \text{ の行の数}$$

であり, 2 つの行列 A, B に対して, その積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}b_{11} + \cdots + a_{ln}b_{n1} & a_{l1}b_{12} + \cdots + a_{ln}b_{n2} & \cdots & a_{l1}b_{1n} + \cdots + a_{ln}b_{nn} \end{pmatrix}$$

と定義する. $C = AB$ とおくと, 行列 C は (l, n) 型行列である. また, C の (i, j) 成分 c_{ij} ($1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n$) は行列 A の i 行と行列 B の j 列との内積, すなわち

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

で書き表される. なお, 行列 A の列の数と行列 B の行の数が等しくないとき, 行列 A, B の積 AB は定義されない.

注意. 一般に, 行列の積は可換ではない. さらに, 行列 A, B の積 AB および BA が定義されたとしても, $AB = BA$ は一般に成り立たない. なお, 可換となりうる行列は正方行列のみである. [各自で理由を考えよう]

例 1.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき, AB および BA を求めよ.

解答. 定義 1.2 より, 2 つの行列 AB, BA はいずれも $(3, 3)$ 型行列, すなわち, 3 次の正方行列であり,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{-1} \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{1} & 3 & -4 \\ \textcolor{blue}{0} & -1 & 1 \\ \textcolor{blue}{-1} & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) & 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ \textcolor{red}{1} \cdot \textcolor{red}{1} + \textcolor{red}{3} \cdot \textcolor{blue}{0} + \textcolor{red}{(-1)} \cdot \textcolor{blue}{(-1)} & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & -1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -6 & 10 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{-2} & \textcolor{red}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \textcolor{blue}{-2} & 4 \\ 1 & \textcolor{blue}{3} & -1 \\ -1 & \textcolor{blue}{-3} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot (-3) & 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-3) & 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & \textcolor{red}{-1} \cdot \textcolor{blue}{(-2)} + \textcolor{red}{(-2)} \cdot \textcolor{blue}{3} + \textcolor{red}{3} \cdot \textcolor{blue}{(-3)} & -1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 19 & -7 \\ -2 & -6 & 3 \\ -5 & -13 & 4 \end{pmatrix}. \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

注意. 例 1.2 で与えた 2 つの行列 A, B はいずれも型が同じ正方行列である. そのため, 行列 A, B の積 AB および BA が定義される. しかし, $AB = BA$ は成り立たない.

問 1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, AB および BA を求めよ.

解答 (概要). 行列 A, B を $(2, 2)$ 型の小行列に分割すると, 行列の積の計算が容易になる場合がある (テキスト p.53-58).