使用テキスト: 対馬龍司「線形代数学講義」（共立出版）

§2.2. 行列の定義と演算 ··· ベクトルを含む行列の基本計算

1.（n 次の）正方行列の逆行列 [テキスト p.40]

（**2.**（2 次の）正方行列の逆行列 [テキスト p.26]）

定義 (p.26,40). $n \in \mathbb{N}$ とし，A を (n,n) 型行列，すなわち，n 次の正方行列とする．このとき，行列 A に対して，次の等式：

$$AX = XA = I$$

を満たす（n 次の正方行列）X が存在するとき，行列 X を A の逆行列といい，

$$A^{-1} = X$$

と書く．また，A が逆行列を持つとき，行列 A は正則であるという．

例. 次の正方行列 A が正則であるかを述べよ．また，行列 A が正則ならば A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 124 & 165 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (3)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad (4)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 123 & 456 & 789 \\ 987 & 654 & 321 \end{pmatrix}$$

解答 (概要). (1) 次の同値変形：

$$\begin{aligned} AX = I &\iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x_{11} + 3x_{21} & 2x_{12} + 3x_{22} \\ -5x_{11} - x_{21} & -5x_{12} - x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より，方程式 $AX = I$ は次の方程式：

$$\underline{\underline{\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ -5x_{11} - x_{21} = 0 \end{cases}}} \quad \text{および} \quad \underline{\begin{cases} 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -5x_{12} - x_{22} = 1 \end{cases}} \tag{$*$}$$

に書き直される．2 組の連立方程式 $(*)$ を解くと，

$$\underline{\underline{x_{11} = -\frac{1}{13},\ \ x_{21} = \frac{5}{13}}},\ \ \underline{x_{12} = -\frac{3}{13},\ \ x_{22} = \frac{2}{13}},\quad \text{すなわち，} X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \ \text{あるいは}\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

であり，$XA = I$ も満たす **[各自で確認]**．以上より，A は正則であり，逆行列 A^{-1} は $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$． ···（答）

(2) (1) と同様の式変形または前週レポート問題 4(1) より，A は正則であり，逆行列 A^{-1} は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -165 \\ -3 & 124 \end{pmatrix}$． ···（答）

(3) (1) と同様の式変形により，方程式 $AX = I$，すなわち，

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は次の方程式：

$$\begin{cases} 3x_{11} - 4x_{21} = 1 \\ -6x_{11} + 8x_{21} = 0 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} 3x_{12} - 4x_{22} = 0 \\ -6x_{12} + 8x_{22} = 1 \end{cases} \tag{$**$}$$

に書き直される．しかし，2 組の連立方程式 $(**)$ を満たす解は存在しない．したがって，A は正則でない． ···（答）

(4) (2) と同様に，$AX = I$ から導かれる連立方程式を満たす解は存在しないので，A は正則でない． ···（答）