

使用テキスト：対馬龍司「線形代数学講義」(共立出版)

行列の基本変形および階数 (テキスト p.44)

与えられた行列に対して行う、以下の 4 つの操作を行 (または列) の基本変形という。

(R1) ある行 (または列) に 0 でない数を掛ける。

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目} \times (-2)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 列目} \times \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(R2)' ある行 (または列) に他の行 (または列) を加える, あるいは引く。

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 列目} - 3 \text{ 列目}} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(R2) ある行 (または列) に他の行 (または列) の定数倍を加える, あるいは引く。

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} - 1 \text{ 行目} \times 2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 列目} + 3 \text{ 列目} \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -3 & 2 \\ -\frac{11}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(R3) 2 つの行 (または列) を交換する。

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -3 & 2 \\ -\frac{11}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 列目} \leftrightarrow 2 \text{ 列目}} \begin{pmatrix} -3 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

要注意. 対馬先生のテキストでは, 基本変形 (R1)-(R3) の過程で “ $\longrightarrow$ ” を用いている. 一方で, その記法は様々である. しかし, 基本変形の前後で行列の成分は互いに異なるので, 行列同士を等号 “ $=$ ” で結んではならない.

定義 (階数). A を零行列でない (m, n) 型行列とする. このとき, 行列 A に基本変形を有限回続けて行い, A を

$$A = \begin{pmatrix} I_r & * \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq r \leq m$$

の形に変形できるとき, r を行列 A の**階数 (ランク)** といい,

$$\text{rank } A = r$$

と表す. ただし, $O_{\alpha, \beta}$ は (α, β) 型の零行列, $*$ は任意の $(r, n-r)$ 型行列で, I_r は次の (r, r) 型の正方行列:

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち, } r \text{ 次の単位行列}$$

であり, r の値は基本変形の仕方に依存せずに定まる. また, A が零行列 O のときは $\text{rank } A = 0$ とする.

注意. 行列の階数を求めるには, 基本変形 (R1)-(R3) を用いて 0 でない成分が右上に階段状に残るように変形すればよい. このとき, その**階段の段数**と行列の階数 (rank) は等しい. 以下の例を上で挙げた 2 つの行列と共に参照しよう.

$$\text{例. rank} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{2}, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} -3 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{3}.$$