使用テキスト：対馬龍司「線形代数学講義」（共立出版）

2.3.2 掃き出し法による逆行列の計算（テキスト p.45）

与えられた行列に対して行う，以下の 3 つの操作：

(R1) ある行に 0 でない数を掛ける．
(R2) ある行に他の行の定数倍を加える，あるいは引く．
(R3) 2 つの行を交換する．

を**行基本変形**という．

$\boxed{\text{掃き出し法を行うための 2 ステップ}}$

Step 1 行列の「右上に」0 でない成分を「1 段ずつ下がる階段状に」残す ⋯ 補助資料参照

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{2\ 行目}\times(-2)]{} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{1\ 行目}+2\ 行目]{} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{11} \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{3\ 行目}-1\ 行目\times 2]{} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1\ 行目\leftrightarrow 2\ 行目]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 2 段差の変わり目が，**1 が一番上から一つずつ下がる**単位ベクトル $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots$ になるように変形する．

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\ 行目-2\ 行目]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1\ 行目\times\frac{1}{2},\ 2\ 行目\times\frac{1}{4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Steps 1,2 より，行列 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix}$ は行基本変形により，(階段行列と呼ばれる）行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に変形される．

例（$m = n = 3$）**.** 補助資料で挙げた 2 つの行列は，行基本変形によって，最終的に以下の行列へ変形される．

$$(1) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} -2 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意 2.3.10′ A : 正方行列 【注：A は正則である = A は逆行列 A^{-1} をもつ】

A は正則である $\Longleftrightarrow$ A は行基本変形により，単位行列 I に変形される