

使用テキスト：対馬龍司「線形代数学講義」(共立出版)

2.4. 行列の転置と(複素)共役 p.48~

★ 行列の転置, 対称行列, 交代行列

定義. (m, n) 型の行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, (n, m) 型となる次の行列:

$${}^t A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を行列 A の転置行列という.

例 ($m=2, n=4$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \implies {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

命題 2.4.2 (基本性質) $A: (m, n)$ 型, $c \in \mathbb{R}$

- (1) ${}^t({}^t A) = A$
- (2) (m, n) 型の行列 B に対して, ${}^t(A \pm B) = {}^t A \pm {}^t B$ (複号同順)
- (3) ${}^t(cA) = c {}^t A$
- (4) (n, p) 型の行列 B に対して, ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

注意. (4) 行列 AB は (m, p) 型で, 行列 ${}^t(AB)$ は (p, m) 型である.

定義. $A: n$ 次正方行列

- (1) A は対称行列である $\stackrel{\text{def}}{\iff} {}^t A = A$,
- (2) A は交代行列である $\stackrel{\text{def}}{\iff} {}^t A = -A$

例 ($n=2$).

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \implies A \text{ は対称行列である (が, 交代行列ではない).}$$

$$\left(\because {}^t A = {}^t \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{blue}{2} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{blue}{2} \\ \textcolor{red}{2} & 6 \end{pmatrix} = A \right)$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \implies A \text{ は交代行列である (が, 対称行列ではない).}$$

$$\left(\because {}^t A = {}^t \begin{pmatrix} 0 & \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{blue}{-2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \textcolor{blue}{-2} \\ \textcolor{red}{2} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -A \right)$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \implies A \text{ は対称行列でも交代行列でもない.}$$

$$(4) A = O \text{ (零行列)} \iff A \text{ は対称行列であり, かつ交代行列である.}$$