使用テキスト: 対馬龍司「線形代数学講義」(共立出版)

2.5. 行列の分割 (テキスト p.53-58)

与えられた行列に対して，“**ブロック**と呼ばれる，より小さい行数あるいは列数をもつ行列” に分ける**ブロック分割**を行うことで，分割後の行列に現れるブロックを『数』とみなして，行列の積などを効率良く計算できる.

例（$m=3,\ n=4$）**.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 列ベクトル表示：$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ (ただし，x_1,x_2,x_3,x_4 はスカラー) とおくと，

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x}=&\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \\ 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4 \\ 9x_1+10x_2+11x_3+12x_4 \end{pmatrix} \\
=&x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \\
=&x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3+x_4\boldsymbol{a}_4,
\end{aligned}
$$

すなわち，列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_4$ をそれぞれ『数』とみなして，形式的に行ベクトルとした行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積を

$$A\boldsymbol{x}=\underline{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\cdots=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3+x_4\boldsymbol{a}_4 \tag{2.38$'$}$$

と表せる.

(2) 行ベクトル表示：$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \boldsymbol{a}'_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}'_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}'_2=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}'_3=\begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{y}'=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ (ただし，y_1,y_2,y_3 はスカラー) とおくと，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}'A=&\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}} \\
=&\begin{pmatrix} y_1+5y_2+9y_3 & 2y_1+6y_2+10y_3 & 3y_1+7y_2+11y_3 & 4y_1+8y_2+12y_3 \end{pmatrix} \\
=&y_1\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}+y_3\begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \\
=&y_1\boldsymbol{a}'_1+y_2\boldsymbol{a}'_2+y_3\boldsymbol{a}'_3,
\end{aligned}
$$

すなわち，行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1,\dots,\boldsymbol{a}'_3$ をそれぞれ『数』とみなして，ベクトル $\boldsymbol{y}'$ と形式的に列ベクトルとした行列 A の積を

$$\boldsymbol{y}'A=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\underline{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \boldsymbol{a}'_3 \end{pmatrix}}=\cdots=y_1\boldsymbol{a}'_1+y_2\boldsymbol{a}'_2+y_3\boldsymbol{a}'_3 \tag{2.39$'$}$$

と表せる.

例 2.5.6′（行列の積）. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とし，行列 AB を求めよ．

解答. 行列 A, B のブロック分割を以下の通りに行う．

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right),\ A_{11} = 1,\quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad A_{13} = 5,$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 12 & 13 & 14 \\ 17 & 18 & 19 \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix},$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array}\right),\ B_{11} = 1,\quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_{13} = -5,$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix},\ B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{31} = 0,\quad B_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad B_{33} = 3.$$

このとき，行列 A, B の積を「ブロック単位で」計算すると，

$$\begin{aligned} AB &= \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} \end{array}\right) \end{aligned}$$

であり，

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} = 1 \cdot 1 + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot 0 = 301,$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} = 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} I + 5\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} = 1 \cdot (-5) + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot 3 = 10,$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 12 & 13 & 14 \\ 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 806 \\ 1311 \\ 1816 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 12 & 13 & 14 \\ 17 & 18 & 19 \end{pmatrix} I + \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 28 & 9 \\ 12 & 43 & 14 \\ 17 & 58 & 19 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot (-5) + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 12 & 13 & 14 \\ 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix}$$

が成り立つので，

$$AB = \begin{pmatrix} 301 & 2 & 13 & 4 & 10 \\ 806 & 7 & 28 & 9 & 0 \\ 1311 & 12 & 43 & 14 & -10 \\ 1816 & 17 & 58 & 19 & -20 \end{pmatrix}.$$