

使用テキスト: 対馬龍司「線形代数学講義」(共立出版)

2.6. 行列と線形写像 (テキスト p.59-62+p.6) $m, n \in \mathbb{N}$ とし, X, Y, Z を空でない集合とする.

定義 (線形写像・線形変換). $\mathbb{R}^m$: m 次実列ベクトルの全体, $\mathbb{R}^n$: n 次実列ベクトルの全体

写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは, 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ および任意のスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad (2.42)$$

$$f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \quad (2.43)$$

が成り立つことである. また, $m = n$ かつ f が線形写像であるとき, f は線形変換であるという.

注意. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像ならば, $f(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$ である. ただし, $k \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathbf{0}_k$ は k 次零ベクトルである.

例 1 ($m = 1, n = 1$). 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -3x$ は線形写像 (線形変換) である.

証明. 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ および任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x + y) = -3(x + y) = -3x + (-3y) = f(x) + f(y),$$

$$f(kx) = -3(kx) = k(-3x) = kf(x)$$

が成り立つ. したがって, f は線形写像 (線形変換) である. □

例 2 ($m = 1, n = 1$). 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 7x^2 - 3$ は線形写像 (線形変換) でない.

証明. $x = 0, y = 0$ とおくと,

$$f(x + y) = f(0 + 0) = f(0) = 7 \cdot 0^2 - 3 = -3,$$

$$f(x) + f(y) = f(0) + f(0) = 7 \cdot 0^2 - 3 + 7 \cdot 0^2 - 3 = -6$$

であることから, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ が成り立たない. したがって, f は線形写像 (線形変換) でない. □

例 3 ($m = 1, n = 1$). 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \cos x$ は線形写像 (線形変換) でない.

証明. $x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2}$ とおくと,

$$f(x + y) = f\left(\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = f(0) = \cos 0 = 1,$$

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 0 = 0$$

であることから, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ が成り立たない. したがって, f は線形写像 (線形変換) でない. □

例 4 ($m = 3, n = 2$). 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は線形写像である. ただし, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ である.

証明. 任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ および任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) \\ a_{31}(x_1 + y_1) + a_{32}(x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

すなわち, $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ が成り立ち, 同様の計算により, $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ も成り立つ [各自で補うこと].
したがって, f は線形写像である. □

定義 (合成写像).

2つの写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して, 集合 X の各元 x を集合 Z の一つの元 $z = g(f(x))$ に対応づける写像を f と g の合成写像といい, $z = g \circ f(x)$ と書く.

注意. 2つの写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して, f と g の合成写像 $g \circ f$ が定義されたとしても, $f \circ g$ が定義されるとは限らない.

例 1 ($X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, Z = \mathbb{R}^2$). 2つの写像 f, g を

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -3x \end{pmatrix}$$

と定める. このとき, $\mathbb{R}$ の各元 x に対して,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^3 \\ -3x^3 \end{pmatrix}$$

である. 一方, 写像 g の終域が $\mathbb{R}^2$ であるにもかかわらず, 写像 f の定義域が $\mathbb{R}^2$ ではなく $\mathbb{R}$ であることから, $\mathbb{R}$ の各元 x に対して, $f \circ g(x) = f(g(x))$ は定義されない.

注意. 2つの写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して, f と g の合成写像 $g \circ f$ および $f \circ g$ が定義されたとしても, $g \circ f = f \circ g$ は一般に成り立たない.

例 2 ($X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, Z = \mathbb{R}$). 2つの写像 f, g を

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -x + 5, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$$

と定める. このとき, $\mathbb{R}$ の各元 x に対して,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(-x + 5) = \sin(-x + 5), \\ f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\sin x) = -\sin x + 5 \end{aligned}$$

である.

定義 (恒等写像).

写像 $f: X \rightarrow X$ を, 集合 X の各元 x を X の同じ元 x に対応づけるように定める. このとき, 集合 X の各元 x に対して, $f(x) = x$ であり, この写像 f を恒等写像といい, f を id_X と書く.

例 3 ($X = \mathbb{R}^3$). 写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は恒等写像である. ただし, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ である.

証明. $\mathbb{R}^3$ の各元 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$) に対して,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x},$$

すなわち, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ が成り立つ. したがって, f は恒等写像である. □

定義 (逆写像).

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, ある写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在し, $g \circ f = \text{id}_X$ を満たすとき, 写像 g を f の逆写像といい, g を f^{-1} (f インバース) と書く.

例 4 ($X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$). 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 7$ の逆写像 f^{-1} は $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ で与えられる.

証明. 写像 g を $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ と定めると, $\mathbb{R}$ の各元 x に対して,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 7) = \frac{1}{3}(3x + 7) - \frac{7}{3} = x = \text{id}_{\mathbb{R}}(x),$$

すなわち, $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ であることから, $g = f^{-1}$ である. したがって, 逆写像 f^{-1} は $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ で与えられる. □