

使用テキスト: 対馬龍司「線形代数学講義」(共立出版)

3.1.1 順列の偶奇 & 3.1.2 行列式の定義と性質 (p.65-69) $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots, n\}$ とする.

定義 (置換). 次の写像:

$$\sigma: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}; i \longmapsto \sigma(i) \quad (\text{ただし, } i \neq j \implies \sigma(i) \neq \sigma(j) \text{ である})$$

を置換という.

注意. 上で与えた写像 σ は, n 個の自然数を重複なく置き換える写像である.

定義 (順列の転倒数). 置換 σ によって定められた n 個の数から成る順列 $(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ の転倒数が k であるとは, $1 \leq i, j \leq n$ を満たす $i, j \in \mathbb{N}$ に対して,

$$i < j \implies \sigma(i) > \sigma(j)$$

を満たすような (i, j) の組が k 個であることと定義する. また, k が偶数のときは, 順列 $(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ を偶順列, k が奇数のときは, 順列 $(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ を奇順列という.

定義 (順列の符号). 置換 σ によって定められた n 個の数から成る順列 $(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ の符号を

$$\text{sgn}(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n)) = (-1)^k$$

と定める. ただし, k は順列 $(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ の転倒数である.

例. 6 個の数から成る順列 $(5 \ 3 \ 2 \ 6 \ 1 \ 4)$ の転倒数および符号 $\text{sgn}(5 \ 3 \ 2 \ 6 \ 1 \ 4)$ を求めよ.

	5	3	2	6	1	4
5		✓	✓		✓	✓
3			✓		✓	
2					✓	
6					✓	✓
1						
4						

解答 (概要). 順列 $(5 \ 3 \ 2 \ 6 \ 1 \ 4)$ にあらわれる 2 つの数字の大小を比べると, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \underline{5 > 3}, \quad \underline{5 > 2}, \quad 5 < 6, \quad \underline{5 > 1}, \quad \underline{5 > 4}, \\ \underline{3 > 2}, \quad 3 < 6, \quad \underline{3 > 1}, \quad 3 < 4, \\ 2 < 6, \quad \underline{2 > 1}, \quad 2 < 4, \\ \underline{6 > 1}, \quad \underline{6 > 4}, \\ 1 < 4, \end{aligned}$$

上の波線部より, 転倒している 2 つの数字の組は 9 つあるので, 順列 $(5 \ 3 \ 2 \ 6 \ 1 \ 4)$ の転倒数は 9 であり, その符号は

$$\text{sgn}(5 \ 3 \ 2 \ 6 \ 1 \ 4) = (-1)^9 = -1. \quad \dots (\text{答})$$

定義 (行列式). n 次行列 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}}$ の成分により定められた次の式:

$$|A| := \sum_{(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n)) \in S_n} \text{sgn}(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n)) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (*)$$

を A の行列式という. ただし, S_n は n 個の数を重複なく並べた ($n!$ 個の) 順列全体である.

【2 次行列の行列式】

長さ 2 の順列は $2(=2!)$ 個で、各順列の転倒数と符号は以下の通りにまとめられる。

順列 (S_2 の要素)	転倒数	符号	$*_2$
(1 2)	0	$\text{sgn}(1\ 2) = 1$	$a_{11}a_{22}$
(2 1)	1	$\text{sgn}(2\ 1) = -1$	$-a_{12}a_{21}$

したがって、2 次行列 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}}$ の行列式 $|A|$ は次のように書き表される。

$$\begin{aligned}
 |A| &= \sum_{(p_1\ p_2) \in S_2} \text{sgn}(p_1\ p_2) a_{1p_1} a_{2p_2} \\
 &= a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21}) \\
 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
 \end{aligned} \tag{**}$$

ここで、 $*_2$ 欄に書かれているのは、各順列に対応する $|A|$ の展開式 (**) にあられる項である。

例. 順列の符号による行列式の定義に従って、以下の 2 次行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} &\Rightarrow |A| = 3 \cdot (-4) - (-1) \cdot 2 = -10. \\
 (2) \ A = \begin{pmatrix} 99998 & 99999 \\ 100000 & 100001 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{aligned} |A| &= 99998 \cdot 100001 - 99999 \cdot 100000 \\ &= \underline{(100000 - 2)(100000 + 1)} - \underline{100000(100000 + 1)} \\ &= \underline{100000^2 - 100000 - 2} - \underline{(100000^2 + 100000)} = -2. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

【3 次行列の行列式】

長さ 3 の順列は $6(=3!)$ 個で、各順列の転倒数と符号は以下の通りにまとめられる。

順列 (S_3 の要素)	転倒数	符号	$*_3$
(1 2 3)	0	$\text{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1 3 2)	1	$\text{sgn}(1\ 3\ 2) = -1$	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
(2 1 3)	1	$\text{sgn}(2\ 1\ 3) = -1$	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
(2 3 1)	2	$\text{sgn}(2\ 3\ 1) = 1$	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3 1 2)	2	$\text{sgn}(3\ 1\ 2) = 1$	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(3 2 1)	3	$\text{sgn}(3\ 2\ 1) = -1$	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

したがって、3 次行列 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$ の行列式 $|A|$ は次のように書き表される。

$$\begin{aligned}
 |A| &= \sum_{(p_1\ p_2\ p_3) \in S_3} \text{sgn}(p_1\ p_2\ p_3) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + (-a_{11}a_{23}a_{32}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + (-a_{13}a_{22}a_{31}) \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
 \end{aligned} \tag{***}$$

ここで、 $*_3$ 欄に書かれているのは、各順列に対応する $|A|$ の展開式 (***) にあられる項である。

例. 順列の符号による行列式の定義に従って、以下の 3 次行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{aligned} |A| &= 1 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 50 + 84 + 96 - 48 - 80 - 105 = -3. \end{aligned} \\
 (2) \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 123 & 456 & 789 \\ 987 & 654 & 321 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{aligned} |A| &= 0 \cdot 456 \cdot 321 + 0 \cdot 789 \cdot 987 + 0 \cdot 123 \cdot 654 \\ &\quad - 0 \cdot 789 \cdot 654 - 0 \cdot 123 \cdot 321 - 0 \cdot 456 \cdot 987 \\ &= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0. \end{aligned}
 \end{aligned}$$