乱流現象に挑む機械学習とその数理

犬伏正信

公開にあたって

本稿は，雑誌「数理科学」の特集「流れの物理と数理の拡がり：流体力学の多彩なかたち」に掲載された記事の著者原稿です．サイエンス社の公開条件に従い，原稿段階のデータを公開します．出版情報は下記のとおりです．
犬伏正信，乱流現象に挑む機械学習とその数理，「数理科学」Vol. 64-10, pp.59–65, サイエンス社，2026.

1. はじめに

流体の乱れた運動状態を**乱流**[*1)]という．乱流は身の回りの流れから，天体スケールの流れまで幅広く見られる．例えば，紅茶に入れたミルクをかき混ぜるとき，また海の流れによって熱が運ばれるときなど，多くの場面で乱流は重要な役割を果たす．近年，機械学習による乱流現象の予測・モデル化が，数学・気象学・工学の研究分野で新たな展開を引き起こしている．本稿では，応用数学の視点から，これらの機械学習研究を紹介したい[*2)]．

数理的な観点として，本稿では乱流を**力学系理論**の枠組み[2)]で捉える[*3)]．以下に紹介する力学系理論の概念や性質の多くは，3 次元 Navier–Stokes 方程式（NSE）に対して十分には解明されていないが[*4)]，後述の通り機械学習の数理的機構を調べる上で見通しの良い視点を与える．

状態空間 H 上の初期値問題を形式的に

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad u(0) = u_0 \in H \tag{1}$$

と書き，解 $u(t)$ が $t \in [0, T]$ 上で定義されているとする．本稿では NSE をこのような発展方程式として捉える．ここで u_0 はなめらかな初期速度場であり，$u(t)$ は時刻 t における速度場を表す[*5)]．以下では，$u(t)$ の時間発展を状態空間 H における曲線（解軌道）と捉える（図 1 参照）．

力学系理論では $u(t)$ の時間的な漸近状態を議論するが，3 次元 NSE では $u(t)$ が一意的に $T = +\infty$ まで延長可能であるか否かは未解決である．この問題は，ミレニアム懸賞問題[7)]として数学的理解に重要であるだけでなく[8)]，乱流物理にも密接に関係する[*6)]．第 2 節では，これに関連して方程式の

∗1） 乱流や流体方程式の特異性等の解説は，本特集の他の記事をご参照いただきたい．

∗2） 紙面の都合上，様々な技術的工夫については本稿では割愛している．詳細は参考文献をご参照いただきたい．なお，本稿の第 2, 3 節は，2026 年 3 月にアムステルダムにて開催された国際会議 “Machine Learning for Fluid Dynamics” における，C.-Y. Lai 氏（Stanford 大学）と D. Worrall 氏（Google DeepMind）の基調講演の内容を参考にしている．同国際会議ホームページ[1)]において基調講演のスライドが公開されている（2026 年 6 月現在）．

∗3） 数学的に厳密な定式化は文献 3, 4) を，乱流の物理的側面は文献 5) を参照されたい．

∗4） 3 次元 NSE の現象論モデル（シェルモデル）に対しては，これらの力学系的性質の一部が厳密に示されている[6)]．

∗5） 本稿では速度場 $u(x, t)$ の空間変数 x は省略する．

∗6） 例えば文献 5) 第 5.2 節 「コルモゴロフ理論」を参照のこと．

特異性に関する機械学習の応用研究を紹介する．

解軌道 $(u(t))_{t\geq 0}$ が時間大域的に定義できる場合を考える．乱流の重要な性質の一つは予測困難性である．力学系理論ではこれは次のように説明される．乱流を表す解 $u(t)$ に加えられた無限小摂動の時間発展 $v(t)$ を考える[*7]．典型的なカオス力学系では，ある正の定数 $\lambda_1 > 0$ があり，「ほとんど」の初期摂動 $v(0) = v_0$（図 1 の矢印参照）に対して，極限

$$\lambda_1 := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|v(t)\|}{\|v_0\|} \qquad (2)$$

が存在する．これは，無限小摂動の大きさが漸近的に $\|v(t)\| \propto \|v_0\| e^{\lambda_1 t}$ と指数的に拡大することを意味する．この指数拡大率 λ_1 は**最大 Lyapunov 指数**と呼ばれる[*8]．つまり，初期の不確実性 $\|v_0\|$ がいくら小さくても，その不確実性は時間と共に指数関数的に増大するのである．この性質は，初期値鋭敏性や軌道不安定性と呼ばれ，いわゆるバタフライエフェクトとして知られている．この予測困難性が社会や産業に大きな影響を及ぼす代表例として，天気予報が挙げられる．第 3 節では，機械学習モデルによる天気予報の研究を紹介する．

速度場 $u(t)$ はベクトル値関数であり，状態空間 H は無限次元の関数空間である．しかし，本稿で紹介する機械学習研究では，$u(t) = u(x,t)$ の空間変数（x）を離散化した有限個の自由度を持つ状態を考える．そこで以下では，空間離散化後の有限次元状態空間を改めて H と書き，その次元を $\dim H$ と表すことにする．NSE の直接数値計算を考える場合，$\dim H$ は計算に要する格子点数のオーダーであり，第 4 節で述べる「小さな」乱流系[9]でも $\dim H = O(10^5)$ である[*9]．

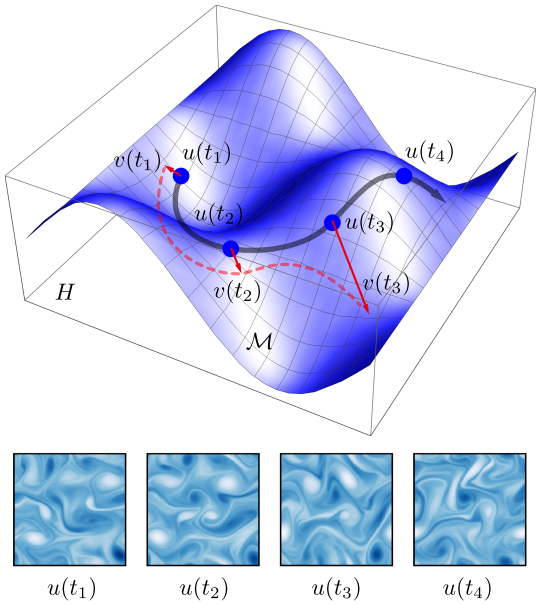


図 1　状態空間 H における解軌道 $u(t)$ の概念図．

NSE のような散逸力学系では，解軌道 $(u(t))_{t\geq 0}$ は状態空間 H よりも次元の低い集合に漸近することが期待される．特に，有限次元の不変多様体 $\mathcal{M} \subset H$ が存在し，解軌道が $\mathcal{M}$ に指数関数的に漸近する場合，$\mathcal{M}$ は慣性多様体と呼ばれる[3,4]（図 1 の曲面参照）．第 4 節では，機械学習を用いて $\mathcal{M}$ 上の座標表現を学習し，乱流の次元圧縮モデルを構成する研究を紹介する．

第 2–4 節で紹介する研究は機械学習の華々しい応用例といえるが，これらの予測・モデル化を支える数理的構造の理解は容易ではない．第 5 節では，比較的単純な機械学習法に注目した数理的研究の進展について紹介する．最後に，第 6 節では機械学習による乱流モデリングの新たな展開について述べる．

2. 流体運動の特異性に迫る機械学習

特異性が現れる流体方程式として，空間 1 次元の Burgers 方程式

---

*7)　$v(t)$ は変分方程式 $\frac{dv}{dt} = DF(u)v$ に従う．ここで $DF(u)$ は F の u における線形化作用素．

*8)　Lyapunov 指数の存在は，Oseledec の乗法エルゴード定理によって保証される[2]．有限次元の力学系では，本定理の仮定の下で，v_0 に応じて，重複度込みで $\dim H$ 個の Lyapunov 指数 $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq \dim H}$ が現れる（$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{\dim H}$）．これは Lyapunov スペクトルと呼ばれ，後述の通り機械学習の数理的研究において重要な役割を果たす．

*9)　乱流計算の重要な応用先の一つである航空機周りの流れ[10]を考えると，その Reynolds 数は $\mathrm{Re} = 10^7$ 程度である．3 次元乱流運動の自由度の見積もり[5] $\mathrm{Re}^{9/4}$ を用いると，$\dim H = O(10^{16})$ 程度である．

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \qquad (3)$$

を考える．初期速度場 u_0 に $u_0'(x_0) < 0$ となる点 x_0 が存在するとき，速度勾配 $\partial_x u$ は有限時間で発散する．これを解の爆発という．具体的には，特性曲線の方法により，$x = x_0 + u_0(x_0)t,\ u_0'(x_0) < 0$ となる (x,t) について

$$\partial_x u(x,t) = \frac{u_0'(x_0)}{1 + t u_0'(x_0)}$$

であることがわかる．ここで $t^* = -1/u_0'(x_0)$ とおき，$t \to t^*$ を考えると，$\partial_x u(x,t) \to -\infty$ となる．つまり爆発することがわかる．

特異点の形成に関して，自己相似解

$$u(x,t) = \tilde{t}^{\lambda} U(y) \qquad (4)$$

を探すアプローチがある．ここで，$\tilde{t} := t^* - t$，$x^* := x_0 - u_0(x_0)/u_0'(x_0)$ に対して，$y := \frac{x - x^*}{\tilde{t}^{\lambda+1}}$ $(\lambda > -1)$ とおいた．もし定数 λ となめらかな関数 U で解となるものが見つかれば，$\partial_x u(x,t) = \frac{1}{\tilde{t}} U'(y)$ となるので，$t \to t^{*-}$ の極限で，固定した y では上式右辺は（$U'(y) \neq 0$ であれば）発散すること[*10]，すなわち特異解であることがわかる．Burgers 方程式に式 (4) を代入すると $-\lambda U + \Big((1+\lambda)y + U\Big)\partial_y U = 0$ を得る．問題はこの微分方程式を満たす $(\lambda, U(y))$ の組を見つけ出すことである．

自己相似解を用いた方法は見通しが良いが，パラメタ λ と関数形 $U(y)$ を同時に決定することは容易ではない．Wang *et al.* (2023) は Physics-Informed Neural Networks (PINN) を用いて，この問題を解決する枠組みを提案した[11]．PINN は方程式系が満たすべき制約条件をニューラルネットワークの学習時のコスト関数として取り入れる機械学習手法である[*11]．

Wang *et al.* (2023) は，PINN で構成された速度場が，Burgers 方程式の既知の特異解に収束することを確認した．さらに，同手法を 2 次元 Boussinesq 方程式と 3 次元軸対称 Euler 方程式に対して適用し，なめらかな自己相似形を持つ特異解を発見した．この特異解は数値的なものであるが，PINN を含めた機械学習による手法は，将来的な特異性研究のツールの一つとなる可能性がある[11]．

3. 天気予報を変える機械学習

NSE は人類史上最も成功した数理モデルの一つと称される[12,13]．実際，NSE や関連するモデルは，現代の社会産業上で欠くことはできない．その代表例の一つが天気予報である．NSE を基礎として，様々な地球物理的効果を取り込んだ数値天気予報（NWP）モデルは，これまで世界中の気象機関によって用いられ，現代社会を支えてきた．数値天気予報では，偏微分方程式である NWP モデルの初期値問題（形式的には式 (1)）を考え，これをスーパーコンピュータで解くことで未来の天気を予測する[*12]．

数値天気予報を取り巻く状況は，近年の機械学習の登場により著しく変化している．特に，Google DeepMind の AI 予報システムの躍進は目覚ましい．2025 年に発表された論文の紹介記事[15]によると，「Google DeepMind の AI モデルは，現在使用されている最良のシステムよりも高速かつ正確に天気を予測する」とのことであり，その衝撃は記事のタイトル “DeepMind AI weather forecaster beats world-class system” に表れている[*13]．

2023 年に発表された GraphCast は，機械学習に基づく全球中期予報システムの一つである．Lam *et al.* (2023) は，特定の評価指標・検証設定の下で，

∗10） 元の座標系では $x - x^* = y\tilde{t}^{\lambda+1} \to 0$ に対応．

∗11） Burgers 方程式の場合，学習対象のニューラルネットワークを $U_{\mathrm{NN}}(y;w)$ と書く．ここで w は学習対象のニューラルネットワーク内の重み（学習パラメタ）である．コスト関数の一つとして，方程式損失を $\mathcal{L}(y, U_{\mathrm{NN}}(y);\lambda,w) = |-\lambda U_{\mathrm{NN}} + ((1+\lambda)y + U_{\mathrm{NN}})\partial_y U_{\mathrm{NN}}|$ と設定し，評価点 $\{y_i\}_{1\le i\le N_s}$ において $\sum_{i=1}^{N_s} \mathcal{L}(y_i, U_{\mathrm{NN}}(y_i);\lambda,w)$（やその他の損失）の値が小さくなるように (λ, w) の値を最適化アルゴリズム（Adam, L-BFGS）を用いて決定する[11]．

∗12） 数値天気予報の発展史を含む，地球流体力学と気象力学の総合的解説については文献 14) を参照．

∗13） ヨーロッパ中期予報センターが公開している数値予報の精度向上のチャートによると，2020 年の 7 日先予報は，2000 年当時の 5 日先予報と同等の精度であるという．標語的には「10 年間で 1 日」の精度向上が達成されてきた．その精度向上のスピードは AI により大きく加速し，「1 年間で 1 日」の精度向上が達成されたという[1]．

GraphCast が代表的な現業数値天気予報モデルに匹敵する予測性能を示すことを報告している[16]．X_t を時刻 t における（風速，気温等の）気象変数とし，その長期データ $D = (X_0, X_{\Delta t}, \cdots, X_T)$ は利用可能であるとする．このとき GraphCast は，

$$\hat{X}_{t+\Delta t} = \mathrm{GC}_\theta(X_t, X_{t-\Delta t}) \tag{5}$$

という形で，直近 2 点のデータ $\{X_t, X_{t-\Delta t}\}$ から Δt 先の気象変数 $X_{t+\Delta t}$ を予測する．この写像 GC_θ が持つパラメタ θ を，予測値が真のデータに近くなるようにデータ D から学習する．すなわち $X_{t+\Delta t} \simeq \hat{X}_{t+\Delta t}$ となるように θ を決定する．

この準備のもと，式 (5) より $\{X_T, X_{T-\Delta t}\} \mapsto \hat{X}_{T+\Delta t}$ が得られるが，式 (5) を再度用いることで，$\{\hat{X}_{T+\Delta t}, X_T\} \mapsto \hat{X}_{T+2\Delta t}$ が得られる．これを繰り返すことで予測値の列 $(\hat{X}_t)$ が生成可能である．データ D から直接（偏微分方程式を経由せずに）気象変数の予測 $\hat{X}_t$ を行うという点で，従来の数値天気予報とは全く異なるアプローチでありながら，全球中期予報が可能であるということを示した．なお，写像 GC_θ は Graph Neural Network（GNN）によって実装されている[16, 17]．

天気予報の対象である大気海洋の運動はカオス的である．第 1 節で紹介した軌道不安定性の概念を取り入れることで，アンサンブル予報のような新たな予測手法が考案され，数値天気予報の精度は向上してきた[14]．決定論的 GNN である GraphCast の後継にあたる GenCast においても，軌道不安定性による予測の不確実性を表現するために，拡散モデルに基づく確率的手法と Transformer が取り入れられており，高い予測性能を示すことが報告されている[15]．

4. AI の限界：次元圧縮下限

これまでに見てきたように，機械学習の流体力学への応用は目覚ましく進展している．ところが，機械学習の方法にも当然限界はある．その数理的構造を正しく見極めることは，新たな手法の開発や信頼性を保証する上での基盤となる．

本節では，機械学習法の一つである「次元圧縮」に着目し，Linot and Graham (2023) による乱流への応用例を紹介する*14)．特に，彼らは 3 次元 NSE によって記述される minimal Couette flow と呼ばれる乱流を対象とし，機械学習による低次元モデルを研究した．この乱流系は 3 次元乱流の中では「最小」のものであるが，それでもある時刻 t の速度場 $u(t)$ を表すのに必要な変数の数は 19074 である（第 1 節の記法を用いると $\dim H = 19074$）．

彼らは，NSE の初期値問題を数値的に解き，十分な時間経過後のデータ $D = (u(t))_{t \geq \mathcal{T}}$ が低い次元（以後 d_h と書く）の慣性多様体 $\mathcal{M} \subset H$ 上にあると考えた．特に，$\mathcal{M}$ 上の座標表現を与える写像 $\chi : \mathcal{M} \to \chi(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^{d_h}$ およびその逆写像 $\chi^{-1} : \chi(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ が存在するとして，データ D を用いてニューラルネットワーク（Autoencoder）を学習した．具体的には，χ, χ^{-1} を近似するエンコーダ χ_{θ_E} とデコーダ $\check{\chi}_{\theta_\mathrm{D}}$ を用意し，

$$(\theta_\mathrm{E}^*, \theta_\mathrm{D}^*) := \arg\min_{\theta_\mathrm{E}, \theta_\mathrm{D}} \sum_{u \in D} \| u - \check{\chi}_{\theta_\mathrm{D}} \circ \chi_{\theta_\mathrm{E}}(u) \|^2$$

となるよう学習パラメタ θ_E^*, θ_D^* を決定した．もし $d_h < \dim H$ に対して $u \approx \check{\chi}_{\theta_\mathrm{D}^*} \circ \chi_{\theta_\mathrm{E}^*}(u)$ となっていれば，低次元化に成功していることになり，低次元表現 $\chi_{\theta_\mathrm{E}^*}(u(t)) \in \mathbb{R}^{d_h}$ が得られることになる．これを $h(t) := \chi_{\theta_\mathrm{E}^*}(u(t))$ とおき，潜在変数と呼ぶ．さらに彼らは，潜在変数のダイナミクス $(h(t))$ を別のニューラルネットワーク（NeuralODE）によってモデル化した．

以上の学習が期待通りに進めば，与えられた初期値 u_0 に対して，$h_0 = \chi_{\theta_\mathrm{E}^*}(u_0)$ が求められる．h_0 を初期値として NeuralODE を用いることで潜在変数のデータ $(h(t))_{t \geq 0}$ が得られ，これをデコーダ $\check{\chi}_{\theta_\mathrm{D}^*}$ により速度場に変換 $\hat{u}(t) := \check{\chi}_{\theta_\mathrm{D}^*}(h(t))$ することで，初期値問題の「良い近似解」$(\hat{u}(t))_{t \geq 0}$ が得られると期待できる．

応用上は，慣性多様体 $\mathcal{M}$ が存在すると仮定しても，その次元 d_h は一般に未知であるため，エ

*14) 機械学習分野の一般論として，次元圧縮の文脈では多様体仮説[18]が重要とされるが，彼らはこの仮説を流体力学の問題に対して構成したといえる[9]．

ンコーダ・デコーダを設計する際に d_h を指定する必要がある*15)．Linot and Graham (2023) によると，上記の機械学習手法により，元の変数の数 $\dim H = 19074$ を $d_h \simeq 15$ 程度まで圧縮することが可能であり，$d_h \gtrsim 15$ であれば，近似解 $(\hat{u}(t))_{t\geq 0}$ の統計的性質は乱流のそれとよく一致する[9]．さらに興味深い観察として，機械学習による圧縮限界 $d_h \simeq 15$ は，この乱流の Lyapunov 次元 d_{L} に近いことを報告している．Lyapunov 次元とは，力学系が持つ「運動の有効自由度」であり*16)，モデル化対象の乱流の Lyapunov 次元は $d_{\mathrm{L}} = 14.8$ である[19]．これは機械学習の圧縮限界 $d_h \simeq 15$ に近く，低次元化限界が Lyapunov 次元によって定まることを示唆した（著者が知る限り）初めての結果である．近年はそれを支持する結果も報告されており[20,21]，Lyapunov 次元が機械学習による低次元化限界を特徴づける一つの指標となりうることを示している．

5. デジタルツインの双子判定：共役性

前節までに紹介した研究では，いずれも様々な機械学習手法（PINN, GNN, 拡散モデル, Transformer，Autoencoder，NeuralODE）を用いて，流体現象の「デジタルツイン」を構成してきたといえる．ところが，対象としている現象と機械学習法の双方が複雑であるため，モデル化の数理的機構の解明に適しているとはいえない．

そこで，対象とする非線形現象と機械学習法の双方を（本質を失わない範囲で）単純化し，数理的理解を目指すアプローチ[22~24]がある．学習の対象は低次元カオス力学系とし，機械学習法としては後述のリザバー計算[25]が採用されることが多い．

前節までに登場した機械学習法はいずれも非線形学習の枠組みであり，表現力は高いがその理論的理解は容易ではない．ニューラルネットワークの表現力の高さを表す指標として普遍近似性が重要であるが[26]，リザバー計算は線形学習の枠組みながら，普遍近似性を持つことが示されており[27]，実際に高い予測性能を持つ[25,28,29]．本節ではこの力学系理論に基づくアプローチ[22~24,27]を概説する．

リザバー計算は再帰型ニューラルネットワーク（RNN）の学習法の一種である．予測やモデル化の対象である力学系を目標力学系と呼び，$u_{t+1} = f(u_t)$ と書く*17)．本節では時間変数を $t \in \mathbb{N}$ とし，f のアトラクタ*18) $\mathcal{A}_u \subset \mathbb{R}^{N_u}$ 上でのダイナミクスを考える．このとき，目標力学系と RNN の時間発展は，それぞれ f, g を用いて

$$u_{t+1} = f(u_t), \tag{6}$$

$$r_{t+1} = g(u_t, r_t) \tag{7}$$

と書かれる*19)．ここで，$r_t \in \mathbb{R}^{N_r}$ は RNN の状態ベクトルとし，RNN への入力信号を $u_t \in \mathcal{A}_u$ とする．特に，入力信号 u_t の 1 ステップ先予測は，$r_{t+1} \mapsto u_{t+1}$ の変換を学習することである．リザバー計算の枠組みでは，

$$u_{t+1} \approx \hat{u}_{t+1} := W r_{t+1} + b \tag{8}$$

となるように出力重み (W, b) が決定される．これは線形学習なので，（正則化付き）最小二乗法により最適な重み (W, b) が定まる．

さて，1 ステップ先予測（8）を達成する重み (W, b) が学習により得られたとしよう．式（7）における u_t を $\hat{u}_t$ に置き換え，

$$r_{t+1} = g(W r_t + b, r_t) =: \mathcal{G}(r_t) \tag{9}$$

を反復的に計算することで，データ列 (r_t) が生成される．これと再び（8）を用いることで，$(\hat{u}_t)$ が得られる．この手順により，目標力学系の軌道デー

*15) 学習しないパラメタをハイパーパラメタという．

*16) Lyapunov スペクトル $\{\lambda_j\}$ に対して $S_j := \sum_{i=1}^{j} \lambda_i$ とおくとき $d_{\mathrm{L}} := j + \frac{S_j}{|\lambda_{j+1}|}$，$j := \max\{i | S_i \geq 0\}$ と定義される．

*17) 第 1 節の微分方程式（1）によって定められる時間 τ 写像を f と書く．すなわち $u(t+\tau) = f(u(t))$ である．$t = n\tau$ $(n \in \mathbb{N})$ とおき，$u(t) = u(n\tau) =: u_n$ とおいたものが $u_{n+1} = f(u_n)$ である．

*18) 近傍の初期値から出発する軌道を吸引する不変集合．

*19) 具体的には，$g(u, r) = \overline{\tanh}[Ar + Bu]$ などが用いられる．ここで $A \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r}$，$B \in \mathbb{R}^{N_r \times N_u}$ はそれぞれランダム行列であり，$(\overline{\tanh}[a])_i := \tanh(a_i)$ と定義する．これは Echo State Network (ESN) と呼ばれる．

タ (u_t) のみから，それに近い性質を持つ $(\hat{u}_t)$ が得られると期待される．特に，$\mathcal{G}$ で定まる力学系（以下，力学系 $\mathcal{G}$ と呼ぶ）を通して目標力学系 f の様々な性質の推定が可能である．例えば，力学系 f の Lyapunov スペクトルの推定[28]や，学習データ (u_t) に含まれない力学系的性質[29]や分岐構造[23,30]までもが推定可能である．

学習によって構成された力学系 $\mathcal{G}$ と，目標力学系 f とはどのような関係があるだろうか．先述の通り，Google DeepMind による GraphCast も同じように自己回帰的な手法を用いており，この問題はリザバー計算に留まらず，機械学習を用いた力学系の学習に共通した課題であるといえる．

その答えを探る上で重要であると考えられているのが，力学系理論における**共役性**の概念である．以下，力学系 $\mathcal{G}$ のアトラクタ $\mathcal{A}_r \subset \mathbb{R}^{N_r}$ 上でのダイナミクスを考える．$(\mathcal{A}_r, \mathcal{G})$ が $(\mathcal{A}_u, f)$ と位相共役であるとは，共役写像と呼ばれる同相写像 $h : \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_u$ が存在して，

$$h \circ \mathcal{G} = f \circ h \tag{10}$$

が $\mathcal{A}_r$ 上で成り立つことをいう．定義より $h \circ \mathcal{G}^n \circ h^{-1} = f^n \ \ (n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．つまり，モデル化の文脈では，f による目標力学系の時間発展が，（共役写像 h を介して）$\mathcal{G}$ による RNN の時間発展と同一視できるということを意味している．標語的にいえば，真の力学系 f と機械学習モデル $\mathcal{G}$ が「デジタルツイン」であることの数学的表現であるともいえる．

この共役写像 h を考える上で，鍵となる概念が一般化同期写像[24]（あるいは不変断面定理[2]）である．詳細は割愛するが，Echo State Property[22]と呼ばれる性質のもとでは，入力履歴に対して RNN 状態 r_t が漸近的に一意に定まる．目標力学系が可逆であれば，写像 $s : \mathcal{A}_u \to \mathcal{A}_r$ が存在して，漸近的に $r_t = s(u_t)$ が成り立つ．この s を一般化同期写像という．

一般化同期写像 $s : \mathcal{A}_u \to \mathcal{A}_r$ が同相写像となる場合，その逆写像 $s^{-1} : \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_u$ が上の共役写像の候補となる．Hart, Hook, and Dawes (2020) はリザバー計算の理論研究に位相共役の概念を持ち込み，適切な仮定のもとで位相共役性が成り立ちうることを示した[27]．さらに，Hara and Kokubu (2024) は，Logistic 写像を目標力学系として，力学系 $\mathcal{G}$ の相空間構造を数値的に明らかにし，“退化” リザバー力学系と目標力学系の間のなめらかな共役性を示した[23]．

Ohkubo and Inubushi (2024) は，リザバー計算における学習対象である「正解写像」を，一般化同期写像 s に基づいて考察した．特に，その正解写像の Taylor 展開の 1 次項を近似する枠組みが従来のリザバー計算であること，さらに高次項を含めた手法により，予測精度と安定性が向上することを示した[24]．特に，共役関係（10）の破れ[23]を定量化することで，高次項の導入により大きくモデル化の精度が向上することが明らかになった．

6. 機械学習による乱流モデリング

共役性は機械学習による力学系のモデル化を理解する上で重要であるが，これはモデル化のある種「究極形」であり，実際の（特に乱流への）応用において有用な指標であるとはいえない．

乱流では，大小さまざまな流れの構造（渦）のうち，大きな渦（いわゆるエネルギー保有領域）の運動が主要な役割を果たすことが多い．例えば，イルカの遊泳においては，尾びれが生成する大きな渦輪が推進力を生む主な要因であることが明らかになっている[31]．このことから，最大渦だけを取り出し，運動をモデル化することも考えられる[*20]．ところが，最大渦には普遍性がないため，普遍性に立脚する従来の乱流モデリング[*21]は適用でき

---

*20） イルカの遊泳の例では，尾びれから生成される渦輪の運動だけをモデル化できれば，推進力の計算の第 0 次近似として有効であろう．

*21） 乱流の小スケールの運動には普遍性があると考えられている[5]．その普遍性に立脚して，小スケール（いわゆる慣性領域）の運動を演繹的にモデル化するのが，乱流モデリングである（以下，演繹的乱流モデリングと呼ぶ）．工学設計をはじめとして，演繹的乱流モデリングは広範な数値計算分野の基盤をなしている[5,10]．機械学習を用いた乱流モデリングの研究も活発に行われているが，小スケールの運動（慣性領

ない．

機械学習は一般に乱流の普遍性を仮定しないため，最大渦のモデル化に適している．実際，乱流の階層構造に適した時空間フィルタを用いることで，機械学習による最大渦のモデル化が可能であることが示された[32]．最大渦には普遍性がないので，そのままでは他の流れに適用できないが，例えば，Kim *et al.* (2021) による分岐を予測する機械学習法[30]と上記最大渦のモデリングを融合することで，学習データの領域外の最大渦の運動もモデル化可能である[34]．機械学習技術の進展を応用することで，従来の乱流モデリングにはない新たな展開に繋がることが期待される．

7. おわりに

本稿では，乱流に関連する現象や手法（解の特異性，天気予報，乱流モデリング）に対する機械学習の応用研究を紹介した．特に，その数理的機構の理解において力学系的性質（Lyapunov 指数，アトラクタ次元，共役性）が重要であることを述べた．本稿では紹介できなかったが，観測データを予測に活用する応用数学的手法であるデータ同化[35,36]も乱流研究には重要であり，そこでも力学系解析が重要な役割を果たす[37,38]．今後は，機械学習やデータ同化の応用・融合研究が進み，乱流現象の予測・モデル化精度はますます向上するであろう．手法は高度化・複雑化していくが，乱流の数理的研究は，その発展を支える基盤として重要であり続けると考える．

謝辞

本稿に関し有益なコメントをいただいた須田智晴氏（東京理科大学），原誠人氏（京都大学）に感謝いたします．

参考文献

1) https://ml4fluids2026.github.io/.
2) C. Robinson（國府 寛司，柴山 健伸，岡 宏枝 訳），『力学系〈上・下〉』，シュプリンガー・ジャパン (2001).
3) J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press (2001).
4) C. Foias, O. Manley, R. Rosa, and R. Temam, *Navier–Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge Univ. Press (2001).
5) 木田 重雄, 柳瀬 眞一郎,『乱流力学』, 朝倉書店 (1999).
6) P. Constantin, B. Levant, and E. S. Titi, *Physica D* **219**, 120–141 (2006).
7) 米田 剛,『数理流体力学への招待―ミレニアム懸賞問題から乱流へ』，サイエンス社 (2020).
8) 坂上 貴之，「数学」 **71**, 178–200 (2019).
9) A. J. Linot and M. D. Graham, *J. Fluid Mech.* **973**, A42 (2023).
10) 河合 宗司，HPCI「富岳百景 Vol.8」インタビュー.
11) Y. Wang, C.-Y. Lai, J. Gomez-Serrano, and T. Buckmaster, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 244002 (2023).
12) 石本 健太,『ミクロの水泳教室』，岩波書店 (2025).
13) I. Stewart（水谷 淳 訳),『世界を変えた 17 の方程式』，SB クリエイティブ (2013).
14) 余田 成男，「ながれ」 **43** 巻 1 号，41–49 (2024).
15) A. Soliman, *Nature* **636**, 282–283 (2024).
16) R. Lam *et al.*, *Science* **382**, 1416–1421 (2023).
17) 堀江 正信，「応用数理」 **35** 巻 1 号，39–44 (2025).
18) Y. Bengio *et al.*, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **35**, 1798–1828 (2013).
19) M. Inubushi, S. Takehiro, and M. Yamada, *Phys. Rev. E* **92**, 023022 (2015).
20) A. Cleary and J. Page, *Phys. Rev. E* **112**, 055105 (2025).
21) M. Y. Vinograd, J. Cullen, and P. Clark Di Leoni, *Phys. Rev. Fluids* **11**, 034402 (2026).
22) L. Grigoryeva, A. Hart, and J.-P. Ortega, *Phys. Rev. E* **103**, 062204 (2021).
23) M. Hara and H. Kokubu, *J. Dyn. Differ. Equ.* **36**, Suppl. 1, 515–540 (2024).
24) A. Ohkubo and M. Inubushi, *Sci. Rep.* **14**, 30918 (2024).
25) K. Nakajima and I. Fischer (eds.), *Reservoir Computing*, Springer (2021).
26) 今泉 允聡,『深層学習の原理に迫る』, 岩波書店 (2021).
27) A. Hart, J. Hook, and J. Dawes, *Neural Networks* **128**, 234–247 (2020).
28) J. Pathak, Z. Lu, B. Hunt, M. Girvan, and E. Ott, *Chaos* **27**, 121102 (2017).
29) M. U. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki, and N. Tsutsumi, *Phys. Rev. E* **104**, 044215 (2021).
30) J. Z. Kim *et al., Nat. Mach. Intell.* **3**, 316–323 (2021).
31) Y. Motoori, H. Murahata, and S. Goto, *Phys. Rev. Fluids* **11**, L042601 (2026).
32) S. Matsumoto, M. Inubushi, and S. Goto, *Phys. Rev. Fluids* **11**, 054606 (2026).
33) H. Choi, C. Cho, M. Kim, and J. Park, *Phys. Rev. Fluids* **10**, 110701 (2025).

域以下）のモデル化に注力しており，演繹的乱流モデルの代替（高精度化）が目的である[33]．

34) S. Matsumoto, M. Inubushi, and S. Goto (in preparation).
35) 犬伏 正信, 「ながれ」 **44** 巻 3 号, 229–236 (2025).
36) 三好 建正,『気象学におけるデータ同化入門』, 朝倉書店 (2026).
37) M. Inubushi, Y. Saiki, M. U. Kobayashi, and S. Goto, *Phys. Rev. Lett.* **131**, 254001 (2023).
38) M. Inubushi and C. P. Caulfield, *J. Fluid Mech.* **1027**, A41 (2026).

（いぬぶし・まさのぶ，東京理科大学理学部）